УДК 517.977

Э. Г. Альбрехт

О ВЫЧИСЛЕНИИ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Введение

В статье рассматриваются управляемые процессы, динамика которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии геометрических ограничений на управляющие силы. Известно [1, 2], что необходимые условия оптимальности управлений в форме принципа максимума Понтрягина приводят в общем случае к краевой задаче для нелинейной канонической системы дифференциальных уравнений, которая не имеет универсального и эффективного метода решения. Предполагается, что функция Понтрягина непрерывно дифференцируема по фазовым координатам и управлениям и ее максимум по управлениям достигается на единственном векторе. Дифференцируемость максимума функции Понтрягина [3] позволяет записать уравнение Гамильтона–Якоби и использовать его для вычисления общего решения канонической системы, опираясь на теорему Якоби [4,5] об интегрировании канонических уравнений и методы построения полного интеграла [4], развитые в классической механике. При известном полном интеграле уравнения Гамильтона–Якоби краевая задача принципа максимума сводится к вычислению решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Это позволяет дать описание решения краевой задачи принципа максимума и, следовательно, искомого программного экстремального процесса, опираясь на численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Приводится модельный пример об оптимальном разгоне и торможении материальной точки, движущейся в сопротивляющейся среде.

Рассмотрена задача синтеза оптимального управления [1, 6–10] в случае выпуклых линейно-квадратичных задач с подвижным правым концом [11] при отсутствии ограничений на управления. Показано, что программные конструкции принципа максимума [1] могут быть использованы [6] для формирования управлений по принципу обратной связи. Указывается частный случай, когда решение задачи получается в явном аналитическом виде. Приведен пример вычисления решения задачи Коши для системы уравнений Риккати [7, 10].

1. Постановка задачи

Будем рассматривать управляемые процессы или объекты произвольной физической природы, динамика которых на заданном конечном промежутке времени $t \in [t_o, t_1]$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\dot{x} = f(t, x, u). \tag{1.1}$$

Здесь $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор, определяющий состояние рассматриваемого процесса в произвольный текущий момент времени t, $u = \{u_1, \ldots, u_m\} \in \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие. На управляющие силы наложено геометрическое ограничение: $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, где область управления U – замкнутое и ограниченное множество.

Будем предполагать, что вектор-функция $f(t, x, u) \in \mathbb{R}^n$ определена и непрерывна по совокупности переменных t, x, u при $t \in [t_o, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, и в каждой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по x, т. е. неравенство

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leqslant L(G)\|x^{(1)} - x^{(2)}\| \tag{1.2}$$

имеет место при любых значениях $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ из области G, где символ $\|z\|$ означает евклидову норму вектора z; $L(G)$ – положительная постоянная. Наконец, примем, что при любых значениях $t \in [t_o, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\|f(t, x, u)\| \leqslant \kappa(1 + \|x\|), \tag{1.3}$$

где κ – некоторая положительная постоянная.

Определение 1.1. Вектор-функция $u = u(t)$, определенная на некотором отрезке времени $t \in [t_o, t_1]$ и принимающая значения в области управления U, называется допустимой [1, с. 5–23], если ее компоненты $u_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ являются кусочно-непрерывными функциями с разрывами первого рода в конечном числе изолированных точек $t = \tau_j^{(i)} \in (t_o, t_1)$ $(j = 1, \ldots, \ell^{(i)})$. Для определенности будем полагать, что в точках разрыва функции $u_i(t)$ непрерывны справа.

Подставим в правую часть уравнений движения (1.1) некоторое допустимое управление $u = u(t)$ и рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)). \tag{1.4}$$

Правая часть этой системы разрывна при $t = \tau_j^{(i)} \in [t_o, t_1]$ ($j = 1, \ldots, \ell^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$). Примем, что в точке $t = \tau_j^{(i)}$ символ $\dot{x}$ означает правую производную по времени.

Решение системы (1.4) при некотором начальном условии $x(t_o) = x^{(o)}$, порождаемое произвольным допустимым управлением $u = u(t)$, будем обозначать символом $x = x(t; u)$; иногда, если из контекста ясно, о каком допустимом управлении идет речь, будем писать кратко: $x = x(t)$. При выполнении указанных выше условий (1.2), (1.3) это решение существует на любом конечном промежутке времени $[t_o, t_1]$, единственно, непрерывно и кусочно-дифференцируемо [1, с. 15–17; 12] по t при любом начальном векторе $x^{(o)}$.

В статье рассматриваются задачи оптимального управления с подвижным правым концом и с фиксированными границами.

При изучении задачи управления с подвижным правым концом предполагается, что задано начальное условие $x(t_o) = x^{(o)}$ и задан функционал, оценивающий качество процесса управления

$$I[u] = \int_{t_o}^{t_1} \omega(t, x(t; u), u(t))\, dt + \varphi(x(t_1; u)). \tag{1.5}$$

Задача 1.1. *Среди допустимых программных управлений $u = u(t)$ требуется найти оптимальное управление $u = u^o(t)$, минимизирующее функционал $I[u]$ (1.5) на движениях системы (1.1), т. е. удовлетворяющее неравенству*

$$\begin{aligned} I[u^o] = \int_{t_o}^{t_1} \omega(t, x^o(t), u^o(t))\, dt + \varphi(x^o(t_1)) \leqslant \\ \leqslant I[u] = \int_{t_o}^{t_1} \omega(t, x(t; u), u(t))\, dt + \varphi(x(t_1; u)), \end{aligned} \tag{1.6}$$

каково бы ни было допустимое управление $u = u(t)$.

При изучении задачи управления с фиксированными границами предполагается, что заданы начальное состояние $x(t_o) = x^{(o)}$, конечное состояние $x(t_1) = x^{(1)}$ и функционал, оценивающий качество процесса управления,

$$I[u] = \int_{t_o}^{t_1} \omega(t, x(t; u), u(t))\, dt. \tag{1.7}$$

Задача 1.2. *Среди допустимых программных управлений $u = u(t)$, переводящих систему (1.1) из заданного начального состояния $x(t_o) = x^{(o)}$ в заданное конечное $x(t_1) = x^{(1)}$, требуется найти оптимальное управление*

$u = u^o(t)$, минимизирующее функционал $I[u]$ (1.7) на движениях системы (1.1), т. е. удовлетворяющее неравенству

$$I[u^o] = \int_{t_o}^{t_1} \omega(t, x^o(t), u^o(t))\, dt \leqslant I[u] = \int_{t_o}^{t_1} \omega(t, x(t; u), u(t))\, dt, \tag{1.8}$$

каково бы ни было допустимое управление $u = u(t)$.

2. Принцип максимума

В этом параграфе для полноты изложения приводится формулировка необходимых условий оптимальности [1, 11, 13] в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина для задачи 1.1. Предполагается, что выполнено

Условие 2.1. *Функции $f(t, x, u)$, $\omega(t, x, u)$, $\varphi(x)$, фигурирующие в постановках задач* 1.1, 1.2, *и их частные производные*

$$\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \omega(t, x, u)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$$

определены и непрерывны по всем переменным при $t \in [t_o, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Введем в рассмотрение функцию Понтрягина:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi^\top f(t, x, u) - \omega(t, x, u). \tag{2.1}$$

Здесь $\psi \in \mathbb{R}^n$ – вспомогательный вектор, верхний индекс $\top$ означает транспонирование.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.2), (1.3), 2.1. *Если $\{x^o(t), u^o(t)\}$, $t \in [t_o, t_1]$ – оптимальный процесс в управляемой системе (1.1), когда качество процесса управления оценивается функционалом* (1.5), *то $H(t, x^o(t), \psi^o(t), u)$ как функция переменной u в каждой точке t непрерывности управления $u^o(t)$ имеет максимум при $u = u^o(t)$, т. е.*

$$H(t, x^o(t), \psi^o(t), u^o(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^o(t), \psi^o(t), u), \tag{2.2}$$

где функции $x^o(t)$, $\psi^o(t)$ являются решением канонической системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t))}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t))}{\partial x} \tag{2.3}$$

при краевых условиях

$$x(t_o) = x^{(o)}, \quad \psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. *Если* $\{x^o(t), u^o(t)\}$, $t \in [t_o, t_1]$ *– оптимальный процесс в управляемой системе* (1.1), *когда качество процесса управления оценивается функционалом* (1.7), *то в формулировке теоремы* 2.1 *надлежит заменить краевые условия* (2.4) *на следующие:*

$$x(t_o) = x^{(o)}, \quad x(t_1) = x^{(1)}. \tag{2.5}$$

3. Уравнение Гамильтона–Якоби

Усилим требования к рассматриваемым функциям и примем

Условие 3.1. *Функции* $f(t, x, u)$ *и* $\omega(t, x, u)$, *фигурирующие в постановках задач* 1.1, 1.2, *и их частные производные*

$$\frac{\partial f(t, x, u)}{\partial u}, \quad \frac{\partial \omega(t, x, u)}{\partial u}$$

определены и непрерывны по всем переменным при $t \in [t_o, t_1]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$.

Пусть выполнены условия 2.1, 3.1, тогда при любом $t \in [t_0, t_1]$ функция Понтрягина $H(t, x, \psi, u)$, (2.1) непрерывно дифференцируема по переменным x, ψ и u. Предположим, что при любых значениях $\{t, x, \psi\} \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ максимум в правой части равенства

$$H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi)) = \max_{u \in U} H(t, x, \psi, u) \tag{3.1}$$

достигается на единственном векторе $u^o(t, x, \psi) \in U$. Из единственности экстремального вектора $u^o(t, x, \psi) \in U$ вытекает [3], что при вычислении производных

$$\frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi))}{\partial x}, \quad \frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi))}{\partial \psi}$$

надлежит полагать $u^o(t, x, \psi) = \mathrm{const}$, т. е. игнорировать зависимость вектора $u^o(t, x, \psi)$ от переменных x и ψ. Поэтому выполняются равенства

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi))}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \max_{u \in U} H(t, x, \psi, u), \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial H(t, x, \psi, u^o(t, x, \psi))}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \max_{u \in U} H(t, x, \psi, u). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Очевидно, что любое решение $\{x^o(t),\ \psi^o(t)\}$ уравнений (3.2), порождаемое граничными условиями (2.4) или (2.5), формирует экстремальный процесс $\{x^o(t), u^o(t) = u^o(t, x^o(t), \psi^o(t))\}$, который удовлетворяет необходимым условиям оптимальности и, следовательно, подлежит исследованию на оптимальность.

Для вычисления искомого решения $\{x^o(t), \psi^o(t)\}$ системы уравнений (3.2) будем строить общее решение канонической системы (3.2), опираясь на уравнение Гамильтона–Якоби [4, 5]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \max_{u \in U} H\left(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}, u\right) = 0. \tag{3.3}$$

Воспользуемся теоремой Якоби об интегрировании системы канонических уравнений [4, 5] и методами вычисления полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби [4]. Приведем формулировку теоремы Якоби.

Теорема 3.1. *Если удалось найти полный интеграл*

$$S = S(t, x, a) + \mathrm{const} \tag{3.4}$$

уравнения Гамильтона–Якоби (3.3), *содержащий* n *произвольных постоянных* $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$, *из которых ни одна не является аддитивной, то общее решение канонических уравнений* (3.2) *описывается системой алгебраических уравнений*

$$\frac{\partial S(t, x, a)}{\partial a} = b, \quad \psi = \frac{\partial S(t, x, a)}{\partial x} \tag{3.5}$$

с $2n$ *произвольными постоянными* $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$.

Разрешив первую группу уравнений в (3.5) *относительно величин* $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *и подставив полученное решение во вторую группу уравнений в* (3.5), *получим общее решение канонических уравнений*

$$x = x(t; a,\, b), \quad \psi = \psi(t; a,\, b). \tag{3.6}$$

Общее решение канонических уравнений (3.6) не всегда удается получить в явном аналитическом виде через элементарные функции, и следовательно, в общем случае, когда рассматривается нелинейная управляемая система, первая группа уравнений в (3.5) дает неявное описание движения. Выведем уравнения для вычисления произвольных постоянных. Для этого подставим соотношения (3.6) в равенства (3.5) и получим $2n$ тождеств. Будем иметь

$$\frac{\partial S(t, x(t; a, b), a)}{\partial a} \equiv b, \quad \psi(t; a, b) \equiv \frac{\partial S(t, x(t; a, b), a)}{\partial x}. \tag{3.7}$$

Воспользуемся граничными условиями (2.4) краевой задачи принципа максимума, тогда из (3.7) получим $3n$ равенств

$$\begin{gathered} \frac{\partial S(t_o, x^{(o)}, a)}{\partial a} = b, \quad \frac{\partial S(t_1, x(t_1), a)}{\partial a} = b, \\ -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x} = \frac{\partial S(t_1, x(t_1), a)}{\partial x}. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Последние равенства служат для вычисления трех неизвестных векторов a, b, $x(t_1)$, которые могут быть найдены при помощи стандартных численных методов решения нелинейных алгебраических уравнений. Вычислив векторы a, b и подставив их значения в (3.7), получим неявное описание решения $\{x^o(t), \psi^o(t)\}$ краевой задачи (2.3), (2.4) принципа максимума. Таким образом, приходим к следующему выводу.

Теорема 3.2. *Если* $S(t, x, a)$ – *полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби* (3.3), *то, вычислив решение* $\{a, b, x(t_1)\}$ *системы нелинейных алгебраических уравнений* (3.8), *получим неявное описание решения* $\{x^o(t), \psi^o(t)\}$ *краевой задачи* (2.3), (2.4) *принципа максимума в форме равенств* (3.7).

Перейдем теперь к описанию решения краевой задачи (2.3), (2.5). Подставим краевые условия (2.5) в первую группу уравнений в соотношениях (3.5) и получим $2n$ равенств

$$\frac{\partial S(t_o, x^{(o)}, a)}{\partial a} = b, \quad \frac{\partial S(t_1, x^{(1)}, a)}{\partial a} = b, \tag{3.9}$$

которые позволяют вычислить произвольные постоянные $\{a, b\}$.

Теорема 3.3. *Если* $S(t, x, a)$ – *полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби* (3.3), *то, вычислив решение* $\{a, b\}$ *системы нелинейных алгебраических уравнений* (3.9), *получим неявное описание решения* $\{x^o(t), \psi^o(t)\}$ *краевой задачи* (2.3), (2.5) *принципа максимума в форме равенств* (3.7).

Таким образом, опираясь для построения решения задач 1.1 и 1.2 на теорию канонических уравнений, трудную проблему вычисления бесконечномерного решения краевой задачи (2.3), (2.4) (или (2.3), (2.5)) можно свести к вычислению [14–17] решения системы нелинейных алгебраических уравнений, если удастся указать полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (3.3).

4. Управление с обратной связью

В параграфах 2, 3 описано построение экстремального программного управления $u^o(t)$, $t \in [t_o, t_1]$ в зависимости от начального состояния $\{t_o, x^{(o)}\}$ управляемого процесса, т. е. $u^o(t) = u^o(t; t_o, x^{(o)})$. Однако очевидно, что в подавляющем большинстве случаев применение программного управления неэффективно и не позволит достичь поставленной цели, потому что фактическое, реализующееся на деле, движение объекта будет отличаться от требуемого из-за погрешностей в исполнительных и измерительных каналах, а также из-за наличия мгновенных или постоянно действующих возмущений.

Указанные обстоятельства приводят к необходимости так выбирать управляющие силы, чтобы реализующееся в действительности движение объекта непрерывно корректировалось по ходу процесса, используя управление по принципу обратной связи [1, 3, 6, 11]. Для практической реализации управления по принципу обратной связи предполагается, что в каждый текущий момент времени t имеется возможность измерять или вычислять по доступной информации [6] фазовый вектор $x(t)$ и строить управляющее воздействие как некоторую функцию $u = u(t, x(t))$, зависящую от этих величин.

Определение 4.1. Допустимым управлением $u = u(t, x)$ называется произвольная непрерывная по совокупности переменных функция, принимающая при всех $\{t, x\} \in \Gamma = [t_o, t_1] \times \mathbb{R}^n$ значения в области управления U.

Основным средством решения задач управления с обратной связью является метод динамического программирования. Общая формулировка метода динамического программирования в форме необходимых и достаточных условий оптимальности и фундаментальная теория построения решений уравнения Гамильтона–Якоби обоснована в исследованиях [8,9], где приведена подробная библиография, отражающая современное состояние проблемы. Будем использовать метод динамического программирования в форме достаточных условий оптимальности [7].

Теорема 4.1. *Если можно указать непрерывно дифференцируемую функцию $V(t, x)$ и допустимое управление $u^o(t, x)$, удовлетворяющие условиям*

$$\min_{u \in U} \left\{ \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} \right]^\top f(t,x,u) + \omega(t,x,u) \right\} = 0, \tag{4.1}$$

$$V(t_1, x) = \varphi(x), \tag{4.2}$$

то управляющее воздействие $u = u^o(t, x)$ является оптимальным, причем минимальное значение $I[u^o]$ функционала (1.5) *определяется равенством*

$$V(t_o, x^{(o)}) = I[u^o] = \min_{u \in U} I[u]. \tag{4.3}$$

В аналитическом случае [7] можно строить локальные решения задачи Коши (4.1), (4.2), опираясь на теорему С. Ковалевской [18], в виде рядов по степеням фазовых координат с коэффициентами, зависящими от времени. Ниже обсуждаются методы вычисления только членов наинизшего порядка в этих рядах, члены более высокого порядка могут быть найдены аналогичным образом.

Соответственно при дальнейшем изложении материала ограничимся рассмотрением выпуклых линейно-квадратичных задач оптимального управления с подвижным правым концом [11] и при отсутствии ограничений на управления. Построение решений уравнения Гамильтона–Якоби (4.1) для линейно-квадратичной задачи с фиксированным правым концом изучено в статье [19].

Пусть на конечном отрезке времени $[t_0, t_1]$ задана линейная управляемая система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{4.4}$$

где $A \in \mathbb{R}^{nn}$, $B \in \mathbb{R}^{nm}$ – постоянные матрицы.

Качество процесса управления оценивается квадратичным функционалом

$$I[u] = \int_{t_0}^{t_1} (x^\top(t)Px(t) + u^\top(t)Qu(t))\,dt + x^\top(t_1)Rx(t_1), \tag{4.5}$$

где $Q \in \mathbb{R}^{mm}$ – определенно положительная матрица, а $P \in \mathbb{R}^{nn}$ и $R \in \mathbb{R}^{nn}$ суть постоянно положительные матрицы.

Момент $t = t_0$ начала процесса и исходное состояние $x(t_o) = x^{(o)}$ не заданы и являются произвольными, причем $0 \leqslant t_o < t_1$, $x^{(o)} \in R^n$. Предположим, что эти величины как-нибудь выбраны и временно зафиксированы. Построим оптимальное решение задачи 1.1 для системы (4.4) и функционала качества (4.5), которое существует и единственно [11]. Будем рассматривать два случая: простой, когда $P = 0$, и общий, когда $P \neq 0$. В простом случае оптимальное управление и минимальное значение функционала (4.5) находятся в явном аналитическом виде. Выполнив необходимые вычисления в соответствии с теоремой 2.1, получим

$$u^o(t) = -Q^{-1}B^\top X^\top[t_1 - t]R(E + D(t_o)R)^{-1}\,X[t_1 - t_o]x^{(o)}, \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} I[u^o] = [x^{(o)}]^\top X^\top[t_1 - t_o]\,(E + D(t_o)R)^{-1}\,(RD(t_o)R+ \\ + R)\,(E + D(t_o)R)^{-1}\,X[t_1 - t_o]x^{(o)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь $X[t]$ – фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x} = Ax$, $X[0] = E$ – единичная матрица,

$$D(t_o) = \int_{t_o}^{t_1} X[t_1 - t]BQ^{-1}B^\top X^\top[t_1 - t]\,dt. \tag{4.8}$$

В общем случае, когда P – ненулевая матрица, оптимальное управление и минимальное значение функционала (4.5) теоретически также могут быть выражены через элементарные функции, каковы бы ни были постоянные матрицы A, B, P, Q, R. Основные затруднения носят вычислительный характер и возникают из-за необходимости вычисления корней характеристического уравнения канонической системы принципа максимума, которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{x} = Ax + \frac{1}{2}BQ^{-1}B^{\top}\psi, \quad \dot{\psi} = 2Px - A^{\top}\psi, \tag{4.9}$$

и последующего вычисления произвольных постоянных по граничным условиям

$$x(t_o) = x^{(o)}, \quad \psi(t_1) = -2Rx(t_1). \tag{4.10}$$

Рассмотрим применение метода динамического программирования для построения управления с обратной связью в случае системы (4.4) при условии минимума функционала (4.5). Решение задачи Коши (4.1), (4.2) будем искать в виде квадратичной формы с неизвестными коэффициентами, которые непрерывно дифференцируемы по времени t, т. е. положим

$$V(t, x) = x^{\top}C(t)x, \tag{4.11}$$

где $C(t), t \in [t_0, t_1]$– симметричная матрица, подлежащая определению.

Основное уравнение метода динамического программирования (4.1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\min_{u \in R^m} \{x^{\top}(\dot{C}(t) + A^{\top}C(t) + C(t)A)x + 2u^{\top}B^{\top}C(t)x + u^{\top}Qu + x^{\top}Px\} = 0.$$

Минимум в левой части этого равенства достигается на управлении

$$u^o(t, x) = -Q^{-1}B^{\top}C(t)x. \tag{4.12}$$

Следовательно, для вычисления матрицы $C(t)$ получаем следующую задачу Коши для системы дифференциальных уравнений Риккати:

$$\dot{C}(t) = -A^{\top}C(t) - C(t)A + C(t)BQ^{-1}B^{\top}C(t) - P, \quad C(t_1) = R. \tag{4.13}$$

Задача Коши (4.13) имеет единственное решение, продолжимое [11] в сторону убывания времени на весь отрезок $[t_0, t_1]$, $t_0 \geqslant 0$.

Уравнения типа (4.13) возникают в различных задачах оптимального управления. В зависимости от конкретной постановки задачи оптимального управления это обстоятельство приводит к многообразным теоретическим проблемам. Теории и методам вычисления решения уравнений Риккати посвящено большое количество работ многих исследователей. Теория и существующие практические методы решения уравнений Риккати в различных ситуациях изложены, например, в монографии [10].

Для практической реализации управления по принципу обратной связи необходимо заранее, до начала управления, вычислить решение системы уравнений Риккати, запомнить его и затем использовать в процессе управления по мере поступления данных о реализовавшихся значениях фазовых координат. Кроме стандартных численных методов решения дифференциальных уравнений для этой цели в рассматриваемой ситуации могут быть использованы описанные выше программные конструкции принципа максимума. Действительно, из равенства (4.3) вытекает, что если расфиксировать начальное состояние $\{t_o, x^{(o)}\}$ в соотношениях (4.6)–(4.8), т. е. положить $t_o = t$, $x^{(o)} = x$, то мы получим [6] оптимальное управление по принципу обратной связи и функцию $V(t, x)$, (4.11). Таким образом, справедлив следующий вывод.

Теорема 4.2. *Пусть матрицы A, B, P, Q, R постоянны, причем P, R являются постоянно положительными, а Q – определенно положительной. Пусть выполнены следующие операции:*

1. *Найдено общее решение канонической системы* (4.9).

2. *Определены произвольные постоянные из граничных условий* (4.10) *и построено оптимальное программное управление $u^o(t; t_o, x^{(o)})$.*

3. *Вычислено минимальное значение $I[u^o] = V(t_o, x^{(o)})$ функционала качества* (4.5).

Тогда, положив $t_o = t$, $x^{(o)} = x$, получим оптимальное управление $u^o(t, x) = u^o(t; t, x)$ по принципу обратной связи. Матрица $C(t)$ квадратичной формы $V(t, x)$ является решением системы уравнений Риккати (4.13).

В частном случае, когда $P = 0$, имеют место равенства

$$u^o(t, x) = -Q^{-1}B^\top X^\top[t_1 - t]R(E + D(t)R)^{-1} X[t_1 - t]x, \tag{4.14}$$

$$C(t) = X^\top[t_1 - t]\,(E + D(t)R)^{-1}\,(RD(t)R + R)\,(E + D(t)R)^{-1}\,X[t_1 - t], \tag{4.15}$$

$$D(t) = \int_t^{t_1} X[t_1 - \tau]BQ^{-1}B^\top X^\top[t_1 - \tau]\,d\tau. \tag{4.16}$$

5. Примеры

Рассмотрим материальную точку M с переменной массой $m(t)$, которая движется по идеально гладкой горизонтальной прямой ξ в сопротивляющейся среде. Будем предполагать, что сила сопротивления пропорциональна скорости точки во второй степени. Пусть реактивная масса $m(t)$ выбрасывается непрерывно с постоянной по величине c, но переменной по направлению относительной скоростью так, что производная $\dot{m}(t)$ существует и непрерывна.

Уравнение движения точки M имеет вид

$$\ddot{\xi} = -\lambda\,\dot{\xi}^2 \operatorname{sgn}\dot{\xi} + u(t),$$

где выражение

$$u(t) = \pm c\,\dot{m}(t)/m(t) = \pm c\,\frac{d}{dt}\,\ln m(t)$$

описывает реактивную силу, приходящуюся на единицу массы; λ – положительный коэффициент пропорциональности. Полагая $\xi = x_1$, $\dot{\xi} = x_2$, запишем это уравнение в нормальной форме:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda\,x_2^2 \operatorname{sgn} x_2 + u. \tag{5.1}$$

Предположим, что нас интересует только проблема управления скоростью точки, а требований к ее положению на прямой ξ не имеется. В таком случае в уравнениях модели (5.1) первое уравнение можно отбросить и рассматривать только второе уравнение, определяющее динамику изменения скорости. Начальные и граничные условия будем выбирать так, чтобы в процессе управления не происходило изменение направления скорости и все время выполнялось неравенство $x_2 \geqslant 0$. В таком случае, обозначив $x_2 = x$, будем рассматривать уравнение

$$\dot{x} = -\lambda\,x^2 + u. \tag{5.2}$$

Пример 5.1. Рассмотрим задачу об оптимальном торможении точки. Пусть задано начальное состояние $x(t_o) = x_o > 0$ системы (5.2). Найдем решение задачи 1.1, когда качество управления оценивается функционалом

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{1} u^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\,x^2(1).$$

Функция Понтрягина

$$H = \psi\,u - \frac{1}{2}\,u^2 - \lambda\psi x^2$$

имеет максимум при $u^o = \psi$ и

$$H^o(t,x,\psi) = \max_{u\in R} H(t,x,\psi,u) = \frac{1}{2}\,\psi^2 - \lambda\psi x^2.$$

Следовательно, уравнение Гамильтона–Якоби (3.3) описывается равенством

$$\frac{\partial S(t,x,\lambda)}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S(t,x,\lambda)}{\partial x}\right)^2 - \lambda x^2\,\frac{\partial S(t,x,\lambda)}{\partial x} = 0. \tag{5.3}$$

Полный интеграл уравнения (5.3) ищем в виде

$$S(t, x, \lambda, a) = -at + W(x, \lambda).$$

Для вычисления функции $W(x, \lambda)$ получаем уравнение

$$\left(\frac{\partial W(x,\lambda)}{\partial x}\right)^2 - 2\lambda x^2 \frac{\partial W(x,\lambda)}{\partial x} - 2a = 0, \tag{5.4}$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial W(x,\lambda)}{\partial x} = \lambda x^2 \pm \sqrt{\lambda^2 x^4 + 2a},$$

$$W(x,\lambda) = \frac{1}{3}\lambda(x^3 - x_o^3) \pm \int_{x_o}^{x} \sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}\, dy.$$

Составим уравнение движения по (3.5):

$$\frac{\partial S(t,x,\lambda,a)}{\partial a} = b,$$

которое в данном случае имеет вид

$$-t \pm \int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = b.$$

Из условия на левом конце находим, что $b = -t_o$, поэтому

$$\pm \int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = t - t_o.$$

Правая часть последнего равенства положительна; отбрасывая лишнее решение, будем иметь

$$-\int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = t - t_o. \tag{5.5}$$

Запишем по (3.5) равенство, которое определяет зависимость между переменными x и ψ :

$$\psi = \frac{\partial S(t,x,\lambda,a)}{\partial x} = \lambda x^2 - \sqrt{\lambda^2 x^4 + 2a}\,. \tag{5.6}$$

Алгебраические уравнения (3.8) для вычисления неизвестных a и $x(1)$ принимают вид

$$\begin{gathered} \int_{x(1)}^{x_o} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = 1 - t_o, \\ x(1) + \lambda x^2(1) - \sqrt{\lambda^2 x^4(1) + 2a} = 0. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Численные решения уравнений (5.7), полученные для конкретных значений исходных данных t_o, x_0, λ, позволяют дать неявное описание решения $\{x^o(t), \psi^o(t)\}$ краевой задачи (2.3), (2.4) принципа максимума и, следовательно, искомого экстремального процесса $\{x^o(t), u^o(t)\}$ в виде (5.5), (5.6).

При $\lambda = 0$, когда задача 1.1 линейна, решение уравнений (5.7) находится в явном виде. Действительно, имеем

$$(x_o - x(1))\frac{1}{\sqrt{2a}} = 1 - t_o,\ x(1) - \sqrt{2a} = 0,$$

$$x(1) = \sqrt{2a} = \frac{x_o}{2 - t_o}.$$

Уравнение движения (5.5) имеет вид

$$-\int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{2a}} = t - t_o.$$

Отсюда находим

$$x = x_o\,\frac{2 - t}{2 - t_o}.$$

Связь (5.6) между переменными x, ψ определяется равенством

$$\psi = -\sqrt{2a}.$$

Следовательно, при $\lambda = 0$ существует единственный экстремальный процесс

$$x^o(t) = x_o\,\frac{2 - t}{2 - t_o}, \quad u^o(t) = \frac{x_o}{2 - t_o},$$

который удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в задаче о торможении. Решение задачи 1.1 при $\lambda = 0$ существует и единственно [11], поэтому найденный экстремальный процесс является оптимальным.

Пример 5.2. Рассмотрим задачу об оптимальном разгоне точки. Пусть заданы начальное состояние $x(t_o) = x_o > 0$ и конечное $x(1) = x^{(1)} > x_o$ системы (5.2). Найдем решение задачи 1.2, когда качество управления оценивается функционалом

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_{t_o}^{1} u^2(t)\,dt.$$

Повторяя предыдущие вычисления, составим уравнение движения по (3.5), которое в данном случае имеет вид

$$-t \pm \int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = b.$$

Из условия на левом конце находим, что $b = -t_o$, поэтому

$$\pm \int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = t - t_o.$$

Правая часть последнего равенства положительна, отбрасывая лишнее решение, будем иметь

$$\int_{x_o}^{x} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = t - t_o. \qquad (5.8)$$

Из условия на правом конце получаем равенство для вычисления произвольной постоянной a

$$\int_{x_o}^{x^{(1)}} \frac{dy}{\sqrt{\lambda^2 y^4 + 2a}} = 1 - t_o. \qquad (5.9)$$

Запишем по (3.5) равенство, которое определяет зависимость между переменными x и ψ:

$$\psi = \frac{\partial S(t, x, \lambda, a)}{\partial x} = \lambda x^2 + \sqrt{\lambda^2 x^4 + 2a}\,. \qquad (5.10)$$

Соотношения (5.8)–(5.10) полностью описывают искомый экстремальный процесс. Численно находим решение a уравнения (5.9) и, подставляя его в (5.8), (5.10), получим неявное описание искомого экстремального процесса.

Вычислим решение задачи при $\lambda = 0$. Уравнение (5.9) примет вид

$$\frac{x^{(1)} - x_o}{\sqrt{2a}} = 1 - t_o,$$

и из (5.8), (5.10) получаем оптимальный процесс

$$x^o(t) = x_o + (x^{(1)} - x_o)\,\frac{t - t_o}{1 - t_o}, \quad u^o(t) = \psi^o(t) = \frac{x^{(1)} - x_o}{1 - t_o}.$$

Подчеркнем в заключение, что при достаточно малых значениях параметра λ из (5.4) вытекает положительность величины a. Следовательно, решения задач об оптимальном разгоне и торможении разлагаются в сходящиеся ряды по степеням λ. Коэффициенты этих рядов легко находятся из приведенных выше общих соотношений.

Пример 5.3. Рассмотрим задачу об управлении движением точки переменной массы в безвоздушном пространстве, тогда уравнения движения (5.1) примут вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \qquad (5.11)$$

Пусть качество процесса управления оценивается функционалом

$$I[u] = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt + \frac{1}{2}\left(x_1^2(1) + x_2^2(1)\right). \tag{5.12}$$

Система дифференциальных уравнений Риккати (4.13) имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{c}_{11}(t) = 2c_{12}^2(t), \quad \dot{c}_{12}(t) = -c_{11}(t) + 2c_{12}(t)c_{22}(t),\\ &\dot{c}_{22}(t) = -2c_{12}(t) + 2c_{22}^2(t), \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$c_{11}(1) = \frac{1}{2}, \quad c_{12}(1) = 0, \quad c_{22}(1) = \frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

Выполнив необходимые вычисления, в соответствии с (4.15), (4.16) получим решение задачи Коши (5.13), (5.14):

$$c_{11}(t) = \frac{-6t + 12}{t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 28t + 29},$$

$$c_{12}(t) = \frac{3t^2 - 12t + 9}{t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 28t + 29},$$

$$c_{22}(t) = \frac{-2t^3 + 12t^2 - 18t + 14}{t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 28t + 29}.$$

Литература

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

2. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.

3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.

4. Аппель П. Теоретическая механика. М.: Физматгиз, 1960. Т. 2.

5. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1959.

6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

7. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.

8. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.

9. Субботин А. И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

10. Егоров А. И. Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001.

11. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.

12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

13. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

14. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1975. Т. 1.

15. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.

16. Дэннис Дж. Е., Шнабель Р. Б. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.

17. Трауб Дж. Ф. Итерационные методы решения уравнений. М.: Мир, 1985.

18. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

19. Альбрехт Э. Г., Соболев О. Н. Синтез систем управления с минимальной энергией // Дифференц. уравнения. 1995. № 10. С. 1611–1616.